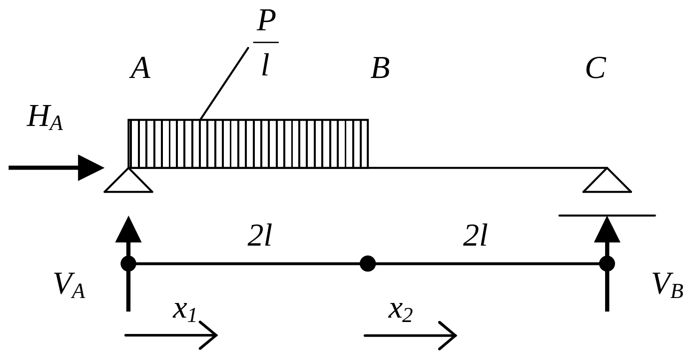
Równanie różniczkowe osi ugiętej pręta

<u>Zadanie</u>

Narysować wykresy: sił tnących, momentów zginających, kątów obrotu i ugięć belki. Schemat statyczny belki jak na rysunku. Sztywność belki wynosi EJ .



Obliczenie reakcji

$$\sum x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4l - \frac{P}{l} \cdot 2l \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = 0{,}5P$$

$$\sum y = 0 \Rightarrow V_A + V_A - \frac{P}{l} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_A = 1{,}5P$$

Równania

<u>Przedział A-B</u> $x_1 \in (0,2l)$

$$T(x_1) = 1{,}5P - \frac{P}{l} x_1$$

$$M(x_1) = 1{,}5P \cdot x_1 - \frac{P}{2l} x_1^2$$

$$\varphi(x_1) = \frac{-1}{EJ} \int M(x_1) dx_1 = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{3}{4} P \cdot x_1^2 - \frac{P}{6l} x_1^3 + A \right)$$

$$w(x_1) = \int \varphi(x_1) dx_1 = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{1}{4} P \cdot x_1^3 - \frac{P}{24l} x_1^4 + Ax_1 + B \right)$$

<u>Przedział B-C</u> $x_2 \in (0,2l)$

$$T(x_2) = -0{,}5P$$

$$M(x_2) = 0{,}5P \cdot (2l - x_2) = Pl - \frac{P}{2} x_2$$

$$\varphi(x_2) = \frac{-1}{EJ} \int M(x_2) dx_2 = \frac{-1}{EJ}\left(Pl \cdot x_2 - \frac{P}{4} x_2^2 + C \right)$$

$$w(x_2) = \int \varphi(x_2) dx_2 = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{Pl}{2} \cdot x_2^2 - \frac{P}{12} x_2^3 + Cx_2 + D \right)$$

Wyznaczenie stałych całkowania

$$\begin{cases} w_A = 0 \Rightarrow w_{AB}(x_1 = 0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ w_C = 0 \Rightarrow w_{BC}(x_2 = 2l) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}Pl^3 + 2Cl + D = 0 \\ \varphi_B^l = \varphi_B^p \Rightarrow \varphi_{AB}(x_1 = 2l) = \varphi_{BC}(x_2 = 0) \Rightarrow \frac{5}{3}Pl^2 + A = C \\ w_B^l = w_B^p \Rightarrow w_{AB}(x_1 = 2l) = w_{BC}(x_2 = 0) \Rightarrow \frac{4}{3}Pl^3 + 2Al = D \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \to 2 \\ 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{14}{3}Pl^3 + 2Al + D = 0 \\ \frac{4}{3}Pl^3 + 2Al - D = 0 \end{cases}$$

5 $\quad \frac{18}{3}Pl^3 + 4Al = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}Pl^2$

6 $\quad 5 \to 4 \quad D = -\frac{5}{3}Pl^3$

7 $\quad 5 \to 3 \quad C = \frac{1}{6}Pl^2$

Ostateczne równania

Przedział A-B $\underline{x_1 \in (0,2l)}$

$$T(x_1) = 1{,}5P - \frac{P}{l}x_1$$

$$M(x_1) = 1{,}5P \cdot x_1 - \frac{P}{2l}x_1^2$$

$$\varphi(x_1) = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{3}{4}P \cdot x_1^2 - \frac{P}{6l}x_1^3 - \frac{3}{2}Pl^2\right)$$

$$w(x_1) = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{1}{4}P \cdot x_1^3 - \frac{P}{24l}x_1^4 - \frac{3}{2}Pl^2 x_1\right)$$

Przedział B-C $\underline{x_2 \in (0,2l)}$

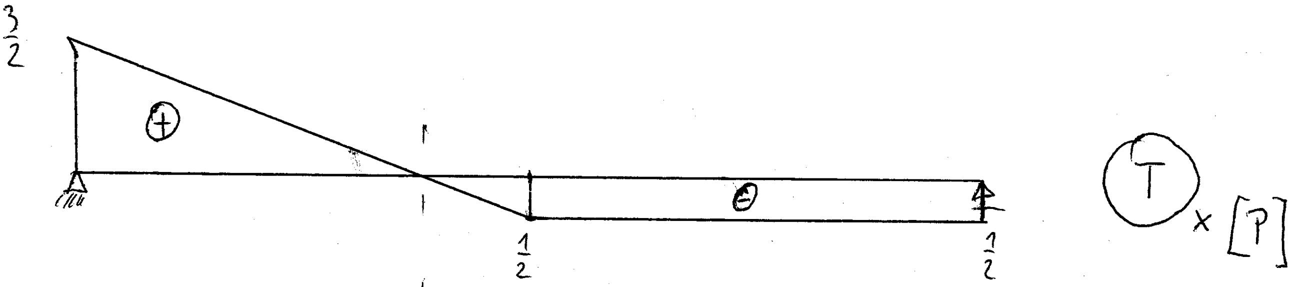
$$T(x_2) = -0{,}5P$$

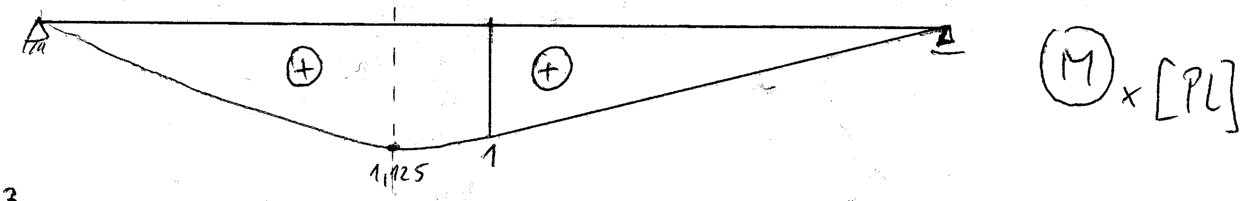
$$M(x_2) = 0{,}5P \cdot (2l - x_2) = Pl - \frac{P}{2}x_2$$

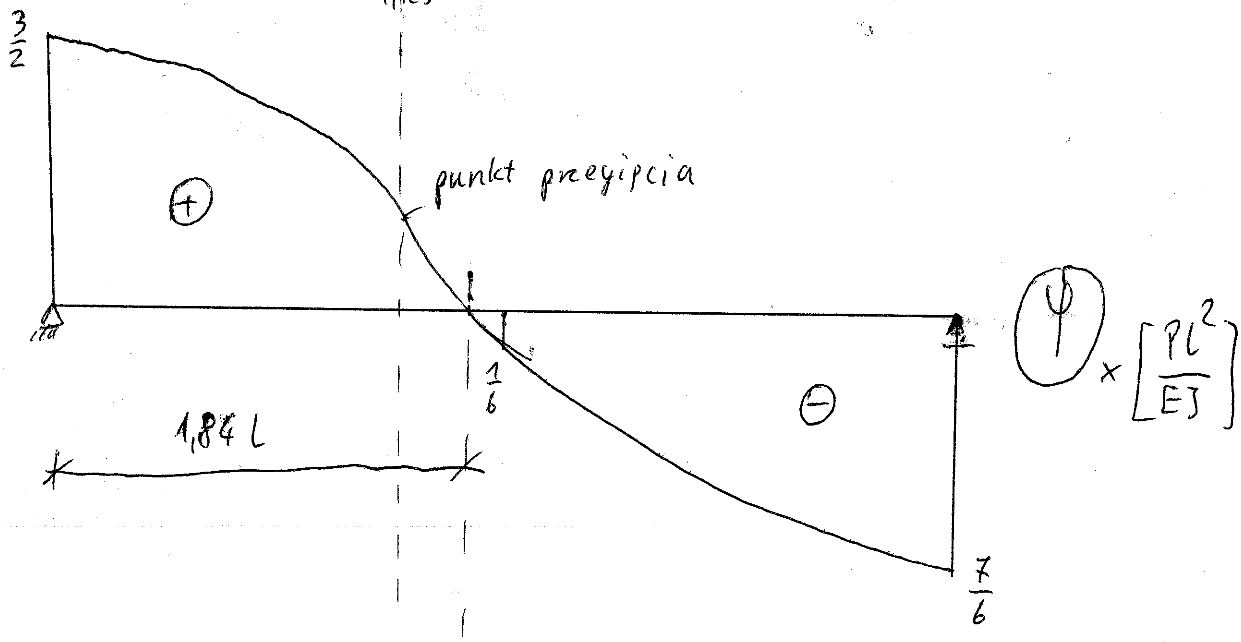
$$\varphi(x_2) = \frac{-1}{EJ}\left(Pl \cdot x_2 - \frac{P}{4}x_2^2 + \frac{1}{6}Pl^2\right)$$

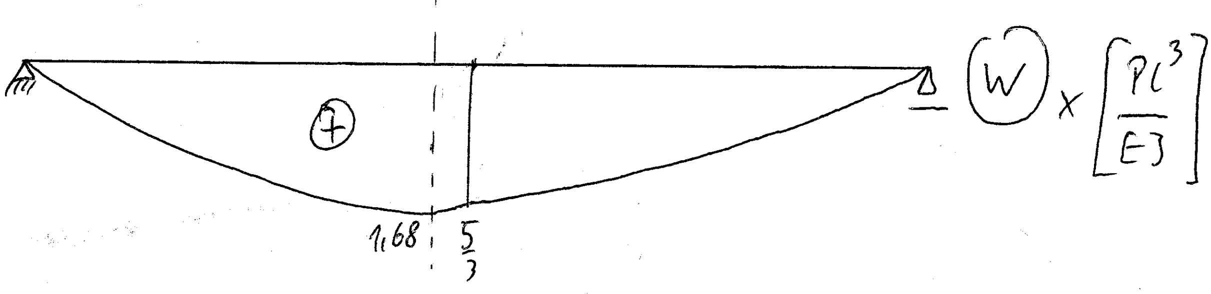
$$w(x_2) = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{Pl}{2} \cdot x_2^2 - \frac{P}{12}x_2^3 + \frac{1}{6}Pl^2 x_2 - \frac{5}{3}Pl^3\right)$$

Wykresy


3/2
+
⊖
1/2
1/2
T × [P]


+
+
1,125
1
M × [PL]


3/2
punkt przegięcia
+
1/6
−
1,84 L
7/6
φ × [PL²/EJ]


+
1,68
5/3
W × [PL³/EJ]