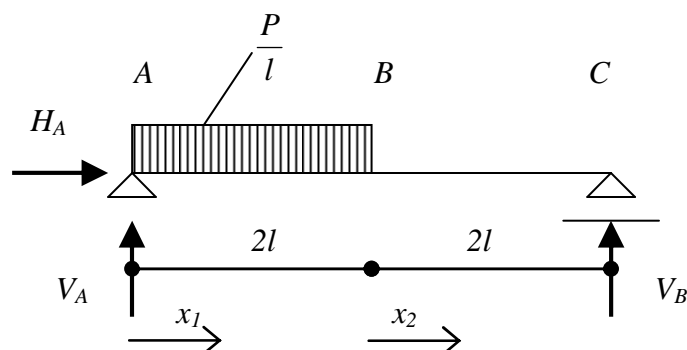


Równanie różniczkowe osi ugiętej pręta

Zadanie

Narysować wykresy: sił tnących, momentów zginających, kątów obrotu i ugięć belki.
Schemat statyczny belki jak na rysunku. Sztywność belki wynosi EJ .



Obliczenie reakcji

$$\sum x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4l - \frac{P}{l} \cdot 2l \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = 0,5P$$

$$\sum y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - \frac{P}{l} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_A = 1,5P$$

Równania

Przedział A-B $x_1 \in (0, 2l)$

$$T(x_1) = 1,5P - \frac{P}{l} x_1$$

$$M(x_1) = 1,5P \cdot x_1 - \frac{P}{2l} x_1^2$$

$$\varphi(x_1) = \frac{-1}{EJ} \int M(x_1) dx_1 = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{3}{4} P \cdot x_1^2 - \frac{P}{6l} x_1^3 + A \right)$$

$$w(x_1) = \int \varphi(x_1) dx_1 = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{1}{4} P \cdot x_1^3 - \frac{P}{24l} x_1^4 + Ax_1 + B \right)$$

Przedział B-C $x_2 \in (0, 2l)$

$$T(x_2) = -0,5P$$

$$M(x_2) = 0,5P \cdot (2l - x_2) = Pl - \frac{P}{2} x_2$$

$$\varphi(x_2) = \frac{-1}{EJ} \int M(x_2) dx_2 = \frac{-1}{EJ} \left(Pl \cdot x_2 - \frac{P}{4} x_2^2 + C \right)$$

$$w(x_2) = \int \varphi(x_2) dx_2 = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{Pl}{2} \cdot x_2^2 - \frac{P}{12} x_2^3 + Cx_2 + D \right)$$

Wyznaczenie stałych całkowania

$$\left\{ \begin{array}{l} w_A = 0 \Rightarrow w_{AB}(x_1 = 0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ w_C = 0 \Rightarrow w_{BC}(x_2 = 2l) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}Pl^3 + 2Cl + D = 0 \\ \varphi_B^l = \varphi_B^p \Rightarrow \varphi_{AB}(x_1 = 2l) = \varphi_{BC}(x_2 = 0) \Rightarrow \frac{5}{3}Pl^2 + A = C \\ w_B^l = w_B^p \Rightarrow w_{AB}(x_1 = 2l) = w_{BC}(x_2 = 0) \Rightarrow \frac{4}{3}Pl^3 + 2Al = D \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \rightarrow 2 \\ 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{14}{3}Pl^3 + 2Al + D = 0 \\ \frac{4}{3}Pl^3 + 2Al - D = 0 \end{array} \right.$$

$$5 \quad \frac{18}{3}Pl^3 + 4Al = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}Pl^2$$

$$6 \quad 5 \rightarrow 4 \quad D = -\frac{5}{3}Pl^3$$

$$7 \quad 5 \rightarrow 3 \quad C = \frac{1}{6}Pl^2$$

Ostateczne równania

Przedział A-B $x_1 \in (0, 2l)$

$$T(x_1) = 1,5P - \frac{P}{l}x_1$$

$$M(x_1) = 1,5P \cdot x_1 - \frac{P}{2l}x_1^2$$

$$\varphi(x_1) = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{3}{4}P \cdot x_1^2 - \frac{P}{6l}x_1^3 - \frac{3}{2}Pl^2 \right)$$

$$w(x_1) = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{1}{4}P \cdot x_1^3 - \frac{P}{24l}x_1^4 - \frac{3}{2}Pl^2x_1 \right)$$

Przedział B-C $x_2 \in (0, 2l)$

$$T(x_2) = -0,5P$$

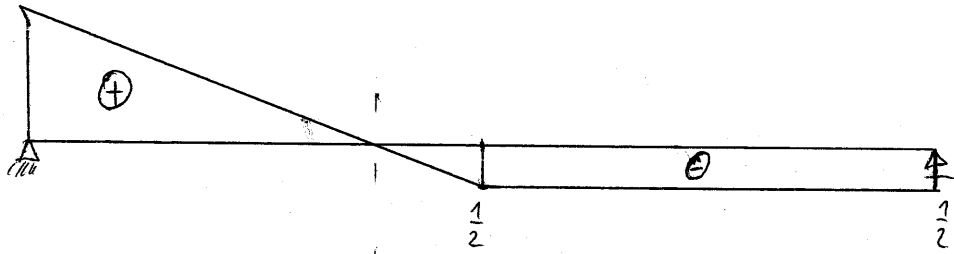
$$M(x_2) = 0,5P \cdot (2l - x_2) = Pl - \frac{P}{2}x_2$$

$$\varphi(x_2) = \frac{-1}{EJ} \left(Pl \cdot x_2 - \frac{P}{4}x_2^2 + \frac{1}{6}Pl^2 \right)$$

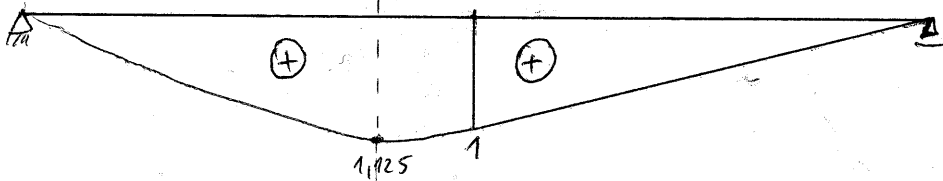
$$w(x_2) = \frac{-1}{EJ} \left(\frac{Pl}{2} \cdot x_2^2 - \frac{P}{12}x_2^3 + \frac{1}{6}Pl^2x_2 - \frac{5}{3}Pl^3 \right)$$

Wykresy

$\frac{3}{2}$

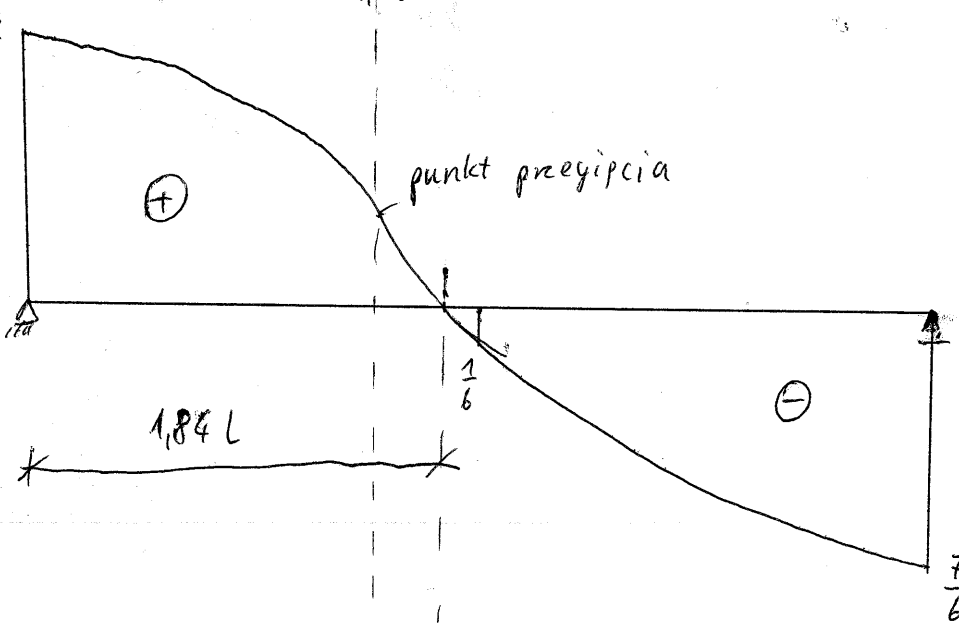


$(T) \times [P]$

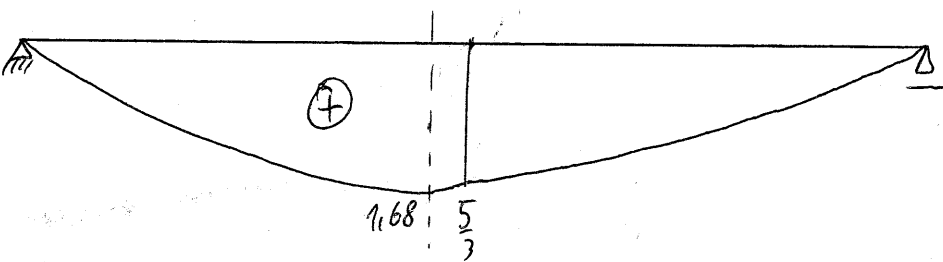


$(M) \times [PL]$

$\frac{3}{2}$



$(\psi) \times \left[\frac{PL^2}{EJ} \right]$



$(W) \times \left[\frac{PL^3}{EJ} \right]$