

Wprowadzenie do rachunku tensorowego

Tensorami nazywamy ogólnie takie obiekty jak skalary, wektory i wielkości wyższych rzędów. Tak więc tensorem rzędu zerowego (np. A , czyli wielkość o walencji 0) są skalary, pierwszego (np. j_i , czyli wielkość o walencji 1) wektory, zaś reprezentacją tensora rzędu drugiego (np. d_{ij}) jest macierz 2x2. Tensory rzędów (czyli walencji) wyższych (np. 3-go, 4-go) nie możemy już zapisać na „płaszczyźnie”.

Operacje na tensorach rządzą się pewnymi zasadami (algebra tensorów):

1. $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ - dodawanie tensorów
2. $a_{ij}b_{klm} = c_{ijklm}$ - iloczyn tensorowy dwóch tensorów jest tensorem o walencji równej sumie walencji składników
3. Istnieje tzw. tensor jednostkowy – zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ czyli } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

4. Zamianę wskaźników dokonujemy poprzez przemnożenie danego tensora przez tensor jednostkowy

$$a_{ij}\delta_{ik} = a_{jk}$$

5. Niezmienniki tensora:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= A_{ii} \\ A_{ij} &\Rightarrow \mathbf{II} = \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}) \\ \mathbf{III} &= \det(A_{ij}) \end{aligned}$$

Równania tensorowe

Jednym z „zastosowań” tensorów jest umożliwienie zapisu relacji funkcyjnej między parą wektorów, czyli np. dla wektorów a_i i b_j będzie

$$a_i = B_{ij}b_j,$$

natomiast dla pary tensorów będzie

$$A_{ij} = B_{ijkl}C_{kl}$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

W zapisie równań tensorowych powszechnie wykorzystuje się tzw. notację sumacyjną Einsteina, pozwalającą zapisać skomplikowane wyrażenia w zwięzłej postaci. Konwencja ta mówi, że sumowania dokonujemy po powtarzających się wskaźnikach, np.

$$a_{ij}x_j \equiv \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Te powtarzające się wskaźniki nazywa się wskaźnikami **niemymi**. Mają one tę właściwość, że można je wymienić na dowolne inne, np.:

$$a_{ij}x_j \equiv a_{ik}x_k$$

UWAGA! Przy przekształceniach należy zwrócić uwagę na to, żeby dany wskaźnik nie powtórzył się więcej niż 2 razy po jednej stronie równania (**dotyczy iloczynów!**).

Przykłady zadań z równaniami tensorowymi

Poniżej podam kilka przykładów, bez wyjaśnienia podstaw fizycznych – po te odsyłam do wykładów.

Przykład 1.

Pole przemieszczeń w nieograniczonym ciele sprężystym ma postać:

$$u_i = x_i B_j x_j \quad (1)$$

Należy wyznaczyć tensor odkształceń w postaci:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (2)$$

oraz naprężeń

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3)$$

a następnie sprawdzić równanie równowagi wewnętrznej

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad (4)$$

Z równania tego należy, przyjmując znane ρF_i , wyznaczyć składowe wektora A_i .

Rozwiązanie

Aby to zadanie rozwiązać należy w pierwszej kolejności obliczyć pochodne (cząstkowe) z wektora przemieszczeń u_i . Pochodną (cząstkową) w zapisie tensorowym oznacza się przecinkiem i wskazuje po jakiej współrzędnej się ją liczy – to po przecinku, np.

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \equiv x_{i,j}, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j \partial x_k} \equiv x_{i,jk}, \quad \text{itp.}\dots$$

Należy jeszcze pamiętać o pochodnej mieszanej (z iloczynu funkcji). Mamy więc w naszym przypadku (po zamianie indeksu j na k w iloczynie! – powód podano wyżej):

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= [x_i B_k x_k]_{,j} = [x_i]_{,j} B_k x_k + x_i [B_k x_k]_{,j} = x_{i,j} B_k x_k + x_i B_k x_{k,j} = \delta_{ij} B_k x_k + x_i B_k \delta_{kj} = \\ &= \delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j \end{aligned} \quad (5)$$

Wektor B_j jest wektorem stałych, stąd pochodna jego jest równa zero. Wykorzystano tu także zależności (można to łatwo rozpisać)

$$x_{i,j} = \delta_{ij}$$

oraz

$$B_k \delta_{kj} = B_j.$$

Pochodną $u_{j,i}$ otrzymujemy podobnie, zamieniając wskaźniki i oraz j , stąd otrzymamy

$$u_{j,i} = \delta_{ij} B_k x_k + x_j B_i \quad (6)$$

wiedząc, że $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Podstawiając (5) i (6) do (2) otrzymamy:

$$2\varepsilon_{ij} = 2\delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j + x_j B_i. \quad (7)$$

Następnie podstawiamy to do równania fizycznego (3)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= G(2\delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j + x_j B_i) + 4\lambda \delta_{ij} B_k x_k = \dots = \\ &= G(x_i B_j + x_j B_i) + \delta_{ij} B_k x_k (2G + 4\lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

Występujące w (3) wyrażenie ε_{kk} otrzymano z przekształcenia (7):

$$2\varepsilon_{kk} = 2\delta_{kk} B_l x_l + x_k B_k + x_k B_k = 2 \cdot 3 \cdot B_l x_l + 2x_k B_k = 6B_k x_k + 2x_k B_k = 8B_k x_k,$$

czyli

$$\varepsilon_{kk} = 4B_k x_k.$$

Chcąc otrzymać ostatni element, czy wyliczyć siłę masową z równania równowagi, musimy obliczyć pochodną z równania (8), czyli

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= [G(x_i B_j + x_j B_i)]_{,j} + [\delta_{ij} B_k x_k (2G + 4\lambda)]_{,j} = \\ &= G \left(\underbrace{\delta_{ij}}_{B_i} \underbrace{x_{i,j}}_{B_j} + \underbrace{x_{j,j}}_{B_i} \right) + (2G + 4\lambda) \left(\delta_{ij} \underbrace{B_k x_{k,j}}_{B_j} \right) = \\ &= 4GB_i + (2G + 4\lambda)B_i = B_i(6G + 4\lambda) \end{aligned}$$

Wykorzystano tu fakt, że pochodna z δ_{ij} jest równa zero. Mając tak policzoną pochodną otrzymamy równanie równowagi

$$\rho F_i = -B_i(6G + 4\lambda), \quad (9)$$

z którego, przy znanym ρF_i , wyznaczmy składowe wektora B_i :

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_1 \\ B_2 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_2 \\ B_3 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Równania (7), (8), (9) i (10) stanowią rozwiązanie zadania.

Przykład 2.

Pole przemieszczeń w nieograniczonym ciele sprężystym ma postać:

$$u_i = (x_i - B_i)x_j B_j \quad (11)$$

Wyznaczyć wielkości z przykładu 1 (tylko zamiast A_i wyznaczyć składowe B_i).

Rozwiązanie

Możemy na początku przekształcić (zamieniając indeksy „nieme” (czyli nie występujące po lewej stronie równania) j na k) (11)

$$u_i = (x_i - B_i)x_j B_j = x_i x_j B_j - x_i B_i B_j = x_i x_k B_k - x_k B_i B_k$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= [x_i x_k]_{,j} B_k - \underbrace{x_{k,j}}_{B_j} B_k B_i = \left(\underbrace{\delta_{ij}}_{x_{i,j}} x_k + x_i \underbrace{\delta_{kj}}_{x_{k,j}} \right) B_k - B_j B_i = \delta_{ij} x_k B_k + x_i \underbrace{\delta_{kj} B_k}_{B_j} - B_j B_i = \\ &= \delta_{ij} x_k B_k + B_j (x_i - B_i) \end{aligned}$$

oraz

$$u_{j,i} = \delta_{ij} x_k B_k + B_i (x_j - B_j).$$

Tak więc tensor odkształcenia ma postać

$$2\varepsilon_{ij} = 2\delta_{ij} x_k B_k - 2B_i B_j + B_j x_i + B_i x_j \quad (12)$$

Tensor ε_{kk} :

$$\varepsilon_{kk} = 4B_k x_k - B_k B_k$$

Stąd tensor naprężeń (równanie fizyczne):

$$\sigma_{ij} = G(2\delta_{ij}x_k B_k + x_i B_j + x_j B_i - 2B_i B_j) + \lambda(4x_k B_k - B_k B_k)\delta_{ij} \quad (13)$$

Pochodna z wyrażenia (13) ma postać (uwaga na $x_{j,j}=3$)

$$\sigma_{ij,j} = G(\underbrace{[2\delta_{ij}x_k B_k]_{,j}}_{2B_i} + \underbrace{[x_i B_j]_{,j}}_{B_i} + \underbrace{[x_j B_i]_{,j}}_{3B_i} - \underbrace{[2B_i B_j]_{,j}}_0) + \lambda(\underbrace{4[x_k B_k]_{,j}}_{B_j} - \underbrace{[B_k B_k]_{,j}}_0)\delta_{ij} = (6G + 4\lambda)B_i \quad (14)$$

Wstawiając (14) do równania równowagi (4) otrzymamy wyrażenie na składowe wektora siły masowej

$$\rho F_i = -(6G + 4\lambda)B_i \quad (15)$$

Ostatecznie składowe wektora B_i wyliczymy przekształcając (15), czyli otrzymamy

$$B_i = -[6G + 4\lambda]^{-1} \rho F_i \quad (16)$$

czyli po rozpisaniu:

$$\begin{aligned} B_1 &= -(6G + 4\lambda)^{-1} \rho F_1 \\ B_2 &= -(6G + 4\lambda)^{-1} \rho F_2 \\ B_3 &= -(6G + 4\lambda)^{-1} \rho F_3 \end{aligned} \quad (17)$$

co kończy zadanie.