

SPRĘŻENIE PRZEPIYWU CIEPLNO-DYFUZYJNEGO W UJĘCIU NUMERYCZNYM

Jerzy PILŚNIAK, Barbara WIECZOREK
Politechnika Śląska, Gliwice

1. Wprowadzenie

Przedmiotem pracy jest analiza algorytmów numerycznych do opisu wzajemnie sprzężonych przepływów termodyfuzyjnych. Podstawę opisu przepływów stanowi układ trzech równań różniczkowych termodyfuzji lepkościowej (por. [2]). W pracy wykorzystano znane metody różnicowe do opracowania procedur numerycznych umożliwiających symulację procesu termodyfuzyjnego. Implementacja procedur numerycznych została wykonana w programach Matlab i Visual C++.

W ramach analizy przeprowadzono sprawdzenie zbieżności wykorzystanych metod obliczeniowych. W opracowaniu przedstawiono tylko jeden z przykładów numerycznych wykorzystanych do testowania procedur numerycznych.

2. Opis zagadnienia

Wzajemnie sprzężone przepływy cieplne i dyfuzyjne w ośrodku o dwóch składnikach opisane są układem równań różniczkowych cząstkowych postaci (por. [2], [5]):

$$\begin{aligned}\dot{X}1 &= B_1 T_{,ii} + A_{11} X1_{,ii} + A_{12} X2_{,ii} + R1 \\ \dot{X}2 &= B_2 T_{,ii} + A_{21} X1_{,ii} + A_{22} X2_{,ii} + R2 \\ \dot{T} &= E T_{,ii} + D_1 \dot{X}1 + D_2 \dot{X}2 + W\end{aligned}\quad (1)$$

Do powyższych równań dodano opis prostej przemiany fazowej (ciało stałe $X1 \leftrightarrow$ ciecz $X2$) zachodzącej w temperaturze T_{top} (por. [1]). Uproszczony opis przemiany fazowej oparty jest o bilans energii oraz pomija skomplikowane zjawiska powierzchniowe:

$$\Delta Q = c_{top} \Delta m \quad (2)$$

przy ogrzewaniu/schładzaniu przyrosty masy składnika 1 oraz 2 opisane są równaniami:

$$\Delta X2 = \pm \frac{\Delta q}{c_{top}} \quad \text{oraz} \quad \Delta X1 = \mp \frac{\Delta q}{c_{top}} \quad (3)$$

Analizowane jest zadanie początkowo-brzegowe w przestrzeni \mathfrak{R}^2 , w której określony jest obszar $\Omega \in \mathfrak{R}^2$ z brzegiem $\partial\Omega$. Poszukiwane są funkcje $T: \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$ oraz

$Xi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$ określone na obszarze $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ o wartościach rzeczywistych, po przyjęciu warunków początkowych $T(0, x, y) = 0$, $Xi(0, x, y) = 0$ dla $x, y \in \partial\Omega$ i warunków brzegowych pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} T(t, x, y) = f_1(x, y), \quad Xi(t, x, y) = g_{1i}(x, y) & \quad \text{dla } x, y \in \partial\Omega_1 \\ T(t, x, y) = f_2(x, y), \quad Xi(t, x, y) = g_{2i}(x, y) & \quad \text{dla } x, y \in \partial\Omega_2 \\ T(t, x, y) = f_3(x, y), \quad Xi(t, x, y) = g_{3i}(x, y) & \quad \text{dla } x, y \in \partial\Omega_3 \\ T(t, x, y) = f_4(x, y), \quad Xi(t, x, y) = g_{4i}(x, y) & \quad \text{dla } x, y \in \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

Przy założeniach $A_j, B_i, D_i, E \in \mathfrak{R}$ oraz $W(t, x, y) \geq 0$ i $R(t, x, y) \geq 0$ dla $x, y \in \Omega$ i $t \in (0, \infty)$ zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie $T(t, x, y)$ i $Xi(t, x, y)$.

W celu rozwiązania zagadnienia rozpatrywany obszar $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ pokryto siatką $\Omega_h \cup \partial\Omega_h$ przyjmując

$$\begin{aligned} \Omega_h & := \{(x_i, y_i) \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, N\} \\ \partial\Omega_h & := \{\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \partial\Omega_3, \partial\Omega_4 \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, N\} \\ \partial\Omega_1 & := (x_i, 0) \quad \partial\Omega_2 := (x_i, 1) \quad \partial\Omega_3 := (0, y_i) \quad \partial\Omega_4 := (1, y_i) \end{aligned}$$

przy uwzględnieniu, że krok wynosi $h := \frac{1}{N+1}$ oraz współrzędne punktów siatki wynoszą odpowiednio $x_i = i h$ i $y_j = j h$ dla $i, j = 0, 1, \dots, N$.

Korzystając z metody różnic skończonych operatory różniczkowe występujące w (1) zastąpiono operatorami różnicowymi postaci (por. [4]):

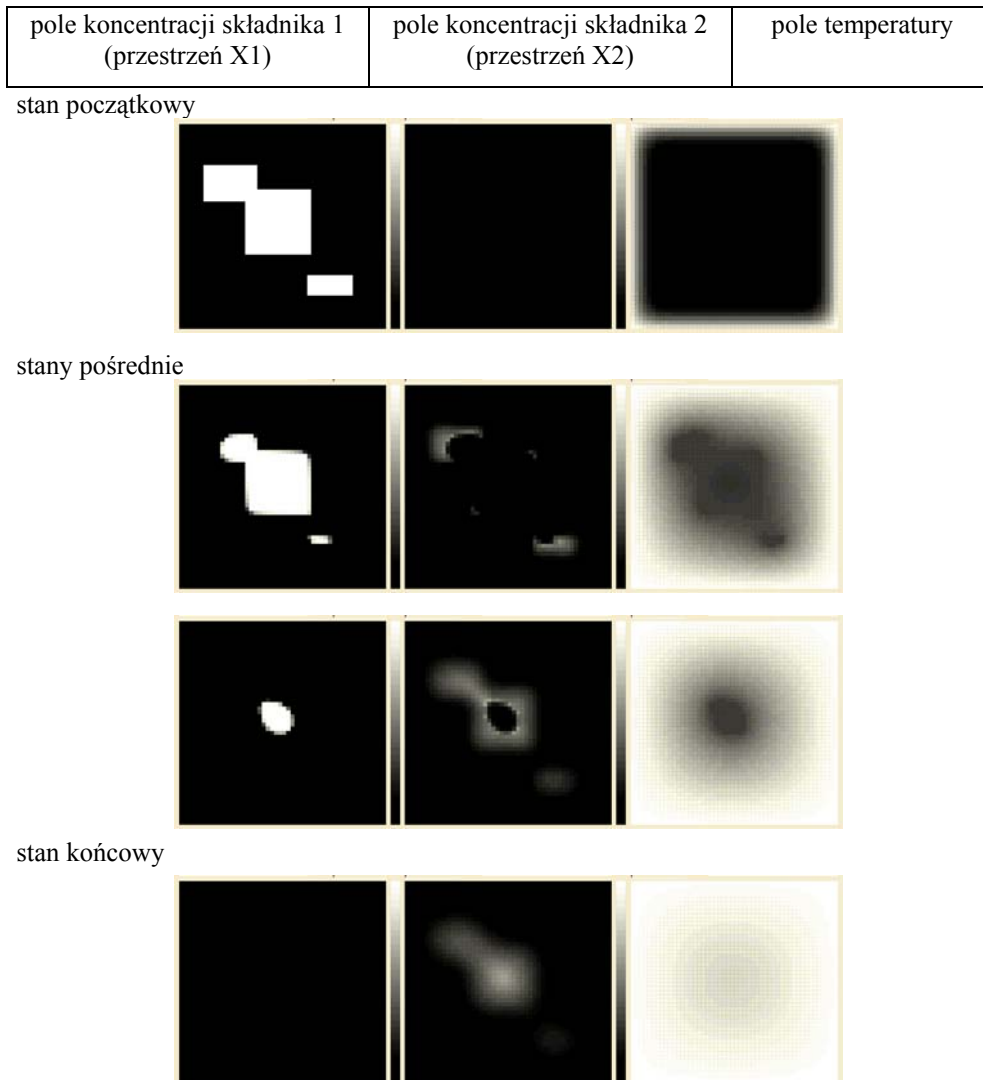
$$\begin{aligned} \dot{Z}(x_i, y_j) & = \frac{Z'_{i,j}{}^{t+\Delta t} - Z'_{i,j}{}^t}{\Delta t} \\ Z_{,ii}(x_i, y_j) & = \frac{Z'_{i+1,j}{}^t - 2Z'_{i,j}{}^t + Z'_{i-1,j}{}^t}{\Delta x} + \frac{Z'_{i,j+1}{}^t - 2Z'_{i,j}{}^t + Z'_{i,j-1}{}^t}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2)$$

Wielkości $Z'_{i,j}{}^{t+\Delta t}$ są poszukiwanymi wielkościami węzłowymi w kolejnych krokach czasowych.

3. Analiza numeryczna

Realizację numeryczną zadania zrealizowano w programie *Visual C++* opracowując program obliczeniowy dla omawianego zagadnienia. W procedurach numerycznych uwzględniono możliwość przemian fazowych w postaci źródeł masy aktywowanych przez temperaturę. Przeprowadzono symulacje przepływów ciepła i dyfuzji dla ośrodka dwuskładnikowego po przyjęciu konkretnych warunków brzegowych, a także różnych współczynników obrazujących różnorodne formy sprzężenia zagadnienia.

W pracy przedstawiono jeden z wielu przykładów numerycznych, które służyły do testowania zbieżności procedur. Na rys.1 przedstawiono przebieg procesu w kilku krokach czasowych. W każdej chwili czasu lewe pole zawiera mapę koncentracji składnika 1, środkowe – koncentrację składnika 2, natomiast prawe rozkład temperatury. W polu środkowym i prawym widoczne jest sprzężenie dyfuzji składnika 2 z polem temperatury.



Rys.1 Przebieg procesu przemiany fazowej
Fig.1 Course of phase transition.

4. Podsumowanie

Uzyskane wyniki świadczą o stabilności procedur numerycznych. Prawidłowa symulacja procesów wymaga umiejętnego doboru kroku czasowego zgodnie z warunkiem Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego. Stabilność procedur numerycznych można zwiększyć w prosty sposób poprzez zastosowanie zamkniętych schematów różnicowych.

Opracowane programy komputerowe pozwalają na wykorzystanie ich do analiz przepływów termodyfuzyjnych dla rzeczywistych zagadnień inżynierskich.

Oznaczenia symboli

T	– wielkość reprezentujące przepływ ciepła, temperature,
X_1, X_2	– wielkość reprezentujące przepływ masy, mass flow,
W	– wielkość przedstawiająca źródło ciepła, heat source,
R_1, R_2	– wielkość przedstawiająca źródła masy, mass sources,
A_{ij}	– współczynniki odpowiedzialne za wzajemne sprzężenie przepływów dyfuzyjnych, coefficients of mutual coupling diffusion floks,
D_i, B_i, E	– współczynniki odpowiedzialne za wzajemne sprzężenie przepływów cieplnych i dyfuzyjnych, coefficients of mutual coupling heat flows and diffusion floks,
c_{top}, T_{top}	– ciepło topnienia, temperatura topnienia, heat of fusion, temperature of fusion,
$\Delta m, \Delta Q, \Delta q$	– ubytek masy ciała stałego, ciepło dostarczone w czasie przemiany fazowej masy Δm , ciepło na jednostkę masy, mass decrement of solid body, delivered heat in phase transition of mass, heat on mass unit.

Literatura

- [1] Jaworski B. M., Dietlaf A. A.: Fizyka, poradnik encyklopedyczny, PWN 1966.
- [2] Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids, *Studia Geotech. et Mech.*, 8, 2, 1986.
- [3] Ostrowska-Maciejwska J.: Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych, PWN 1982.
- [4] Potter D.: Metody obliczeniowe fizyki, PWN 1977.
- [5] Wieczorek B.: Rozwiązania fundamentalne zagadnienia quasi-statycznego termodyfuzji sprężystej, *ZN Pol.Śl.*, z.84, Gliwice 1997.

COUPLING OF HEAT FLOW AND MASS FLOW IN NUMERICAL FORMULATION

Summary

The paper is gone on the scientific research which apply to phase transition in the thermodiffusion processes. They proceed under the influence of action external agents. There was presented results of phase transition solid body to liquid body. The process is described by the system equations, which allow for mutually coupled heat and diffusion flows. The numerical solution of these equations were obtained by finite difference method of numerical analysis. The computer program was written Visual C++. The program enables the simulation of the mutually process for different boundary and initial conditions and changeable source, which generate transitions. Moreover there was made an analysis of convergence of applied computational method.