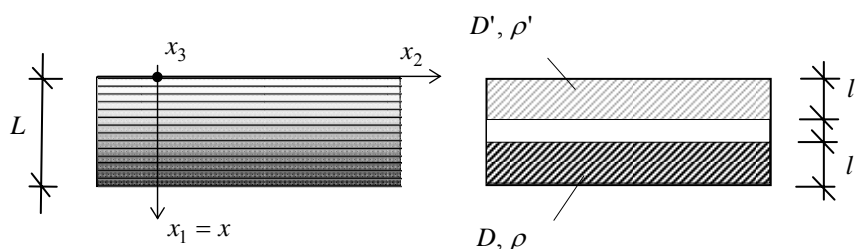


## DYFUZJA W MATERIAŁACH GRADACYJNYCH

Jan KUBIK  
Politechnika Opolska, Opole

### 1. Wprowadzenie

Przyjmowany w rozważaniach fizyki budowli model ośrodka jednorodnego najczęściej na tyle odbiega od realiów, iż należy myśleć o bardziej zbliżonym do rzeczywistości ujęciu problemu. Istotnie, za makro-jednorodnością kryje się mezo-niejednorodność, która w wielu przypadkach posiada decydujący wpływ na przepływy wilgoci i energii w kapilarno-porowatych materiałach budowlanych. Jedną z możliwości modelowania procesów na poziomie makro- i mezoskali daje teoria uśredniania tolerancyjnego podana w pracach Woźniaka i Wierzbickiego [3]. W szczególności założymy, iż ośrodek składać się będzie ze szkieletu oraz zmieniającej się w sposób ciągły porowatości. Otrzymamy model dwuskładnikowy dobrze opisuje przepływy w przypowierzchniowych warstwach muru gdzie porowatość jest największa. Materiał taki nosi nazwę gradacyjnego (por. [1,2,3]).



Rys. 1. Elementy makro- i nanostruktury warstwy  
Fig. 1 Elements of the macro- and nanostructure of the layer

### 2. Model procesu

Ogólny przypadek przepływów dyfuzyjnych opisany jest równaniem

$$\rho \frac{dc}{dt} - (D_{ij} c_{,j}) = \rho R, \quad (1)$$

oraz warunkami brzegowymi  $\mathbf{j}|_A = \mathbf{j}^0$ ,  $c|_{A'} = c^0$  i początkowymi  $c(t=0_+) = c_0$ , w którym współczynniki dyfuzji  $D_{ij}$ , gęstość  $\rho$  i źródło masy  $\rho R$  są silnie zmiennymi, a nawet nieciągłymi funkcjami położenia.

Analizowane równanie przepływu dyfuzyjnego można zastąpić układem równań o ciągłych i wolnozmiennych współczynnikach.

W dalszych rozważaniach wprowadzimy operację uśredniania określoną relacją

$$\langle g(\bar{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{\bar{x}-l/2}^{\bar{x}+l/2} g(x) dx \quad -\frac{l}{2} < \bar{x} < \frac{l}{2}, \quad (2)$$

oraz pojęcie funkcji wolnozmiennnej  $G$  należącej do jądra operatora  $\langle \rangle$  oraz fluktuacyjną funkcję kształtu  $h$ , która jest liniową funkcją znikającą poza obszarem fluktuacji  $-\frac{l}{2} < \bar{x} < \frac{l}{2}$ .

Poszukiwane stężenie masy w materiale przedstawimy w formie sumy stężenia uśrednionego  $Z(x,t)$  i jego fluktuacji  $Y(x,t)$  modyfikowanej przez funkcję kształtu  $h$

$$c(x,t) = Z(x,t) + hY(x,t). \quad (3)$$

Wprowadzając funkcję (3) do (1) dokonujemy następnie operacji uśredniania równania (1).

W rozważaniach przyjmuje się, iż zmiana – gradacja materiału następuje tylko względem  $x_1 \equiv x$ , brzegu materiału. przypadek ten odpowiada np. dyfuzji w warstwach powierzchniowych drewna.

### 3. Operacja uśredniania

Dokonując dekompozycji stężenia  $c$  na średnie stężenie  $Z$  oraz jego fluktuacji  $Y$  powinniśmy wyznaczyć obie funkcje występujące w uśrednieniu. Pierwszą operacją prowadzącą do tego celu jest dokonanie operacji uśredniania na równaniu (1). Zachodzi

$$\begin{aligned} < -\rho \dot{c} + [D_{ij}(Z + hY)_{,i}]_{,j} - \rho R > = < -\rho(\dot{Z} + h\dot{Y}) > + \\ & + < (D_{ij}Z_{,i})_{,j} > + < (D_{ij}(hY)_{,i})_{,j} > - < \rho R >. \end{aligned} \quad (4)$$

W wyniku przekształceń otrzymamy

$$-\Lambda \dot{Y} + D_{\alpha j} Z_{,j\alpha} + (D_{1j} Z_{,j})_{,1} + (\hat{D}_{11} Y)_{,1} + \hat{D}_{\alpha 1} Y_{,\alpha} = 0, \quad (\alpha = 2,3). \quad (5)$$

Podobnie, przemnażając równanie dyfuzji (1) przez funkcję kształtu  $h$  i dokonując uśrednień otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle -\rho \dot{c} h + [D_{ij}(Z + hY)_{,i}]_{,j} h - \rho R h \rangle = \langle -\rho(\dot{Z} + h\dot{Y})h \rangle + \\ + \langle [D_{ij}(Z + hY)_{,i}]_{,j} h \rangle - \langle \rho R h \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Po przekształceniach otrzymamy następujące równanie uśrednione

$$\hat{D}_{ij} Z_{,j} + \hat{D}_{11} Y + l^2 (\Lambda \dot{Y} - \bar{D}_{\alpha\beta} Y_{,\alpha\beta}) = 0, \quad (7)$$

które łącznie z równaniem (5) i warunkami brzegowymi pozwala na wyznaczenie funkcji  $Z$  oraz  $Y$ . W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia

$$D_{ij} \equiv \langle \dot{D}_{ij} \rangle, \quad \hat{D}_{ij} \equiv \langle \dot{D}_{ij} h \rangle, \quad \bar{D}_{ij} = \frac{1}{s^2} \langle \rho h h \rangle, \quad \Lambda = \langle \rho h \rangle, \quad \bar{\Lambda} = \langle \rho n h \rangle. \quad (8)$$

#### 4. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych uśrednień wynika możliwość wyznaczenia przepływów przez przyścienne warstwy materiału, które są modyfikowane z uwagi na zachodzące w nich procesy wymiany. Warto zauważyć, iż tego typu materiałami są przypowierzchniowe warstwy powłok biologicznych, przez które dochodzi do wymiany masy z otoczeniem.

Z podobną sytuacją mamy do czynienia często w przypowierzchniowych warstwach tynków, kiedy w wyniku wieloletniego wypłukiwania składników spoiwa otrzymujemy materiał o większej porowatości niż w głębszych warstwach.

Tę osobliwość wymiany wykorzystuje się w tynkach renowacyjnych o dużej porowatości warstw przypowierzchniowych.

#### Oznaczenia symboli

$D_{ij}$	– tensor współczynników dyfuzji, diffusion coefficient tensor, [kg/(m·s)],
$c$	– stężenie $c = Z + hY$ , concentration $c = Z + hY$ , [-],
$\mathbf{j}, j$	– strumień masy, mass flux, [kg/(m <sup>2</sup> ·s)],
$\rho R$	– źródło masy, mass source [kg],
$\langle \rangle$	– operacja uśredniania, averaging operation, [-],
$h$	– funkcja kształtu, shape function, [-],
$Z$	– stężenie średnie, effective concentration, [-],
$Y$	– fluktuacja stężenia, concentration fluctuation, [-].

#### Literatura

- [1] Suresh S., Martensen A.: Fundamentals of functionally graded materials, The University Press, Cambridge 1998.
- [2] Radzikowska A., Jędrysiak J.: Przewodnictwo ciepła w kompozycie z gradacją własności, Fizyka Budowli w Teorii i Praktyce, T. 11, Łódź 2007.
- [3] Woźniak Cz., Wierzbicki E.: Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Wydawnictwo Pol. Częstochowska, Częstochowa 2000.

## **DIFFUSION IN GRADATION MATERIALS**

### **Summary**

The changes of porosity and diffusivity in the superficial layers of renovation plasters are present. The description so changing properties lets propose the model of gradation materials. This model was used to the analysis of the transport of the mass in superficial layers.