Wprowadzenie do rachunku tensorowego

Tensorami nazywamy ogólnie takie obiekty jak skalary, wektory i wielkości wyższych rzedów. Tak więc tensorem rzędu zerowego (np. A, czyli wielkość o walencji 0) są skalary, pierwszego (np. j_i , czyli wielkość o walencji 1) wektory, zaś reprezentacją tensora rzędu drugiego (np. d_{ij}) jest macierz 2x2. Tensory rzędów (czyli walencji) wyższych (np. 3-go, 4-go) nie możemy już zapisać na „płaszczyźnie''.

Operacje na tensorach rządzą się pewnymi zasadami (algebra tensorów):

1. $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ - dodawanie tensorów
2. $a_{ij} b_{kln} = c_{ijkln}$ - iloczyn tensorowy dwóch tensorów jest tensorem o walencji równej sumie walencji składników
3. Istnieje tzw. tensor jednostkowy – zwany deltą Kroneckera
$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ czyli } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla i = j} \\ 0 & \text{dla i} \neq \text{j} \end{cases}$$
4. Zamianę wskaźników dokonujemy poprzez przemnożenie danego tensora przez tensor jednostkowy
$$a_{ij}\delta_{ik} = a_{ik}$$
5. Niezmienniki tensora:
$$A_{ij} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{I} &= A_{ii} \\ \mathbf{II} &= \frac{1}{2}\left(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}\right) \\ \mathbf{III} &= \det\left(A_{ij}\right) \end{aligned}$$

Równania tensorowe

Jednym z „zastosowań'' tensorów jest umożliwienie zapisu relacji funkcyjnej między parą wektorów, czyli np. dla wektorów a_i i b_j będzie
$$a_i = B_{ij} b_j ,$$
natomiast dla pary tensorów będzie
$$A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl}$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

W zapisie równań tensorowych powszechnie wykorzystuje się tzw. notację sumacyjną Einsteina, pozwalającą zapisać skomplikowane wyrażenia w zwięzłej postaci. Konwencja ta mówi, że sumowania dokonujemy po powtarzających się wskaźnikach, np.
$$a_{ij} x_j \equiv \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$
Te powtarzające się wskaźniki nazywa się wskaźnikami **niemymi**. Mają one tą właściwość, że można je wymienić na dowolne inne, np.:
$$a_{ij} x_j \equiv a_{ik} x_k$$
UWAGA! Przy przekształceniach należy zwrócić uwagę na to, żeby dany wskaźnik nie powtórzył się więcej niż 2 razy po jednej stronie równania.

Przykłady zadań z równaniami tensorowymi

Poniżej podam kilka przykładów, bez wyjaśnienia podstaw fizycznych – po te odsyłam do wykładów.

Przykład 1.

Pole przemieszczeń w nieograniczonym ciele sprężystym ma postać:

$$u_i = x_i B_j x_j \tag{1}$$

Należy wyznaczyć tensor odkształceń w postaci:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{2}$$

oraz naprężeń

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{3}$$

a następnie sprawdzić równanie równowagi wewnętrznej

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \tag{4}$$

Z równania tego należy, przyjmując znane ρF_i, wyznaczyć składowe wektora A_i.

Rozwiązanie

Aby to zadanie rozwiązać należy w pierwszej kolejności obliczyć pochodne (cząstkowe) z wektora przemieszczeń u_i. Pochodną (cząstkową) w zapisie tensorowym oznacza się przecinkiem i wskazuje po jakiej współrzędnej się ją liczy – to po przecinku, np.

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \equiv x_{i,j}, \ \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j \partial x_k} \equiv x_{i,jk}, \text{ itp...}$$

Należy jeszcze pamiętać o pochodnej mieszanej (z iloczynu funkcji). Mamy więc w naszym przypadku (po zamianie indeksu j na k w iloczynie! – powód podano wyżej):

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= [x_i B_k x_k]_{,j} = [x_i]_{,j} B_k x_k + x_i [B_k x_k]_{,j} = x_{i,j} B_k x_k + x_i B_k x_{k,j} = \delta_{ij} B_k x_k + x_i B_k \delta_{kj} = \\ &= \delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j \end{aligned} \tag{5}$$

Wektor B_i jest wektorem stałych, stąd pochodna jego jest równa zero. Wykorzystano tu także zależności (można to łatwo rozpisać)

$$x_{i,j} = \delta_{ij}$$

oraz

$$B_k \delta_{kj} = B_j .$$

Pochodną $u_{j,i}$ otrzymujemy podobnie, zamieniając wskaźniki i oraz j, stąd otrzymamy

$$u_{j,i} = \delta_{ij} B_k x_k + x_j B_i \tag{6}$$

wiedząc, że $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Podstawiając (5) i (6) do (2) otrzymamy:

$$2\varepsilon_{ij} = 2\delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j + x_j B_i . \tag{7}$$

Następnie podstawiamy to do równania fizycznego (3)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= G(2\delta_{ij} B_k x_k + x_i B_j + x_j B_i) + 4\lambda\delta_{ij} B_k x_k = \ldots = \\ &= G(x_i B_j + x_j B_i) + \delta_{ij} B_k x_k (2G + 4\lambda) \end{aligned} \tag{8}$$

Występujące w (3) wyrażenie ε_{kk} otrzymano z przekształcenia (7):

$$2\varepsilon_{kk} = 2\delta_{kk} B_l x_l + x_k B_k + x_k B_k = 2\cdot 3\cdot B_l x_l + 2x_k B_k = 6B_k x_k + 2x_k B_k = 8B_k x_k\,,$$

czyli

$$\varepsilon_{kk} = 4B_k x_k\,.$$

Chcąc otrzymać ostatni element, czy wyliczyć siłę masową z równania równowagi, musimy obliczyć pochodną z równania (8), czyli

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \left\lfloor G\left(x_i B_j + x_j B_i\right)\right\rfloor_{,j} + \left\lfloor \delta_{ij} B_k x_k \left(2G + 4\lambda\right)\right\rfloor_{,j} = \\
&= G\left(\underbrace{\overbrace{x_{i,j}}^{\delta_{ij}} B_j}_{B_i} + \boxed{\overbrace{x_{j,j}}^{3}} B_i\right) + \left(2G + 4\lambda\right)\left(\delta_{ij}\underbrace{B_k \overbrace{x_{k,j}}^{\delta_{kj}}}_{B_j}\right) = \\
&= 4GB_i + \left(2G + 4\lambda\right)B_i = B_i(6G + 4\lambda)
\end{aligned}$$

Wykorzystano tu fakt, że pochodna z δ_{ij} jest równa zero. Mając tak policzoną pochodną otrzymamy równanie równowagi

$$\rho F_i = -B_i(6G + 4\lambda)\,, \tag{9}$$

z którego, przy znanym ρF_i, wyznaczymy składowe wektora B_i:

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_1 \\
B_2 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_2 \\
B_3 &= -\frac{\rho}{6G + 4\lambda} F_3
\end{aligned} \tag{10}$$

Równania (7), (8), (9) i (10) stanowią rozwiązanie zadania.

Przykład 2.

Pole przemieszczeń w nieograniczonym ciele sprężystym ma postać:

$$u_i = \left(x_i - B_i\right)x_j B_j \tag{11}$$

Wyznaczyć wielkości z przykładu 1 (tylko zamiast A_i wyznaczyć składowe B_i).

Rozwiązanie

Możemy na początku przekształcić (zamieniając indeksy „nieme'' (czyli nie występujące po lewej stronie równania) *j* na *k*) (11)

$$u_i = \left(x_i - B_i\right)x_j B_j = x_i x_j B_j - x_i B_i B_j = x_i x_k B_k - x_k B_i B_k$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= \left[x_i x_k\right]_{,j} B_k - \underbrace{\overbrace{x_{k,j}}^{\delta_{k,j}} B_k}_{B_j} B_i = \left(\overbrace{x_{i,j}}^{\delta_{ij}} x_k + x_i \overbrace{x_{k,j}}^{\delta_{kj}}\right) B_k - B_j B_i = \delta_{ij} x_k B_k + x_i \underbrace{\delta_{kj} B_k}_{B_j} - B_j B_i = \\
&= \delta_{ij} x_k B_k + B_j\left(x_i - B_i\right)
\end{aligned}$$

oraz

$$u_{j,i} = \delta_{ij} x_k B_k + B_i\left(x_j - B_j\right).$$

Tak więc tensor odkształcenia ma postać

$$2\varepsilon_{ij} = 2\delta_{ij} x_k B_k + 2B_i B_j + B_j x_i + B_i x_j \tag{12}$$

Tensor ε_{kk} :

$$\varepsilon_{kk} = 4B_k x_k - B_k^2$$

Stąd tensor naprężeń (równanie fizyczne):

$$\sigma_{ij} = (2G + 4\lambda)\delta_{ij} x_k B_k + GB_i (x_i + x_j) - \lambda\delta_{ij} B_k^2 - 2GB_i B_j \tag{13}$$

Pochodna z wyrażenia (13) ma postać (uwaga na $x_{j,j}=3$)

$$\sigma_{ij,j} = (2G + 4\lambda)\underbrace{[\delta_{ij} x_k B_k]_{,j}}_{B_i} + \underbrace{GB_i[(x_i + x_j)]_{,j}}_{\boxed{G(B_j - 3B_i)}} - \underbrace{[\lambda\delta_{ij} B_k^2]_{,j}}_{0} - \underbrace{[2GB_i B_j]_{,j}}_{0} = (2G + 4\lambda)B_i + G(B_j - B_i),$$

skąd otrzymamy wyrażenie na składowe wektora siły masowej

$$\rho F_i = -B_i(-G + 4\lambda) - G\overbrace{B_j}^{B_i\delta_{ij}} = -B_i[G(-1 + \delta_{ij}) + 4\lambda] = -4\lambda B_i \tag{14}$$

Ostatecznie składowe wektora B_i wyliczymy przekształcając (14), czyli otrzymamy

$$B_i = -[G(-1 + \delta_{ij}) + 4\lambda]^{-1} \rho F_i = -\frac{\rho}{4\lambda} F_i \tag{15}$$

czyli po rozpisaniu:

$$\begin{aligned} B_1 &= -(4\lambda)^{-1} \rho F_1 \\ B_2 &= -(4\lambda)^{-1} \rho F_2 \\ B_3 &= -(4\lambda)^{-1} \rho F_3 \end{aligned} \tag{16}$$

co kończy zadanie.